Центральная предельная теорема для барицентров Васерштейна от гауссовских мер

Алексей Крошнин[1,2] Александра Суворикова[1,3]

[1] Институт проблем передачи информации РАН, Москва
[2] Высшая школа экономики, Москва
[3] Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Berlin
gorianzwei@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается пространство многомерных нормальных распределений, снабженное транспортным расстоянием 2-Васерштейна. Исследуются дифференциальные свойства оптимального транспортного отображения между такими распределениями. Рассматриваются обобщенные средние по Фреше от мер, определенные на основе транспортного расстояния, — барицентры Васерштейна. Для барицентров установлен аналог центральной предельной теоремы, уточняющий известные ранее результаты типа закона больших чисел.

Ключевые слова: барицентр Васерштейна; нормальное распределение; центральная предельная теорема.

1 Введение

Объекты, которые можно рассматривать как вероятностные распределения, возникают в самых разных областях. Зачастую необходимо исследовать их, учитывая геометрию пространства, на котором они определены. Так, один из естественных способов определить "геометрическую" метрику между распределениями — это транспортное расстояние (расстояние Монжа-Канторовича, Васерштейна, Канторовича-Рубинштейна и т.д.) Рассмотрим пространство $\mathcal{P}_2\left(\mathbb{R}^d\right)$ вероятностных мер на $\mathbb{R}^d$, обладающих конечным вторым моментом. *Расстояние 2-Васерштейна* между мерами $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2\left(\mathbb{R}^d\right)$ определяется следующим образом [1,2]:

$$W_2^2(\mu, \nu) := \min_{\gamma \in \Pi(\mu,\nu)} \int \|x-y\|_2^2 \, d\gamma(x,y),$$

где минимум берется по множеству *транспортных планов* из μ в ν, т.е. по всем мерам $\gamma \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d\right)$ с маргинальными распределениями μ и ν, соответственно.

Наделив пространство мер метрической структурой, можно определить среднее от распределений (которое мы в данном случае будем называть барицентром), как среднее по Фреше, которое является естественным обобщением линейного среднего на нелинейные метрические пространства. Пусть дана случайная мера $\mu \in \mathcal{P}_2\left(\mathbb{R}^d\right)$, имеющая распределение $\boldsymbol{P}$ и конечное мат. ожидание дисперсии. *Барицентром Васерштейна* распределения $\boldsymbol{P}$ называется мера ν_*, минимизирующая средний квадрат отклонения [3]:

$$\nu_* = \operatorname{bar}(P) := \underset{\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E}\, W_2^2(\mu, \nu).$$

Известно, что для барицентров Васерштейна выполняется закон больших чисел [4,5,6]: если дана i.i.d. последовательность мер $\mu_1, \mu_2, \ldots$, то *эмпирические барицентры*

$$\nu_n = \operatorname{bar}(\mu_1, \ldots, \mu_n) := \underset{\nu}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} W_2^2(\mu_i, \nu)$$

сходятся к барицентру распределения $W_2(\nu_n, \nu_*) \to 0$. Тем не менее, в общем случае на данный момент не известно никаких результатов о скорости сходимости барицентров, либо об их предельном распределении.

В данной работе мы рассмотрим частный случай, а именно — нормальные распределения на $\mathbb{R}^d$ (более общо, можно рассматривать так называемые *scatter-location* семейства []), и покажем, что для эмпирических барицентров нормальных мер имеет место центральная предельная теорема.

Для гауссовских мер $\mu = \mathcal{N}(r, Q)$ и $\nu = \mathcal{N}(m, S)$ расстояние 2-Васерштейна можно выразить в явном виде [7,2]:

$$W_2^2(\mu, \nu) = \|r - m\|_2^2 + \operatorname{tr} S + \operatorname{tr} Q - 2 \operatorname{tr}\left(S^{1/2} Q S^{1/2}\right)^{1/2}.$$

Более того, если Q и S невырожденные, то существует *оптимальное транспортное отображение*, т.е. оптимальный транспортный план γ^* сосредоточен на графике отображения $T_\mu^\nu \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, переводящего меру μ в меру ν. Данное отображение тоже представимо в явном виде

$$T_\mu^\nu(x) := m - r + T_Q^S x, \quad T_Q^S := S^{1/2}\big(S^{1/2} Q S^{1/2}\big)^{-1/2} S^{1/2}. \tag{1}$$

Известно, что семейство невырожденных гауссовских мер замкнуто относительно взятия барицентра, а именно: если $\mathcal{N}(m, S) \sim \boldsymbol{P}$, то $\operatorname{bar}(\boldsymbol{P}) = \mathcal{N}(r, Q)$, где $r = \mathbb{E}\, m$ и Q — единственное положительно определенное решение уравнения

$$Q = \mathbb{E}\left(S^{1/2} Q S^{1/2}\right)^{1/2}$$

или, что эквивалентно,

$$\mathbb{E}\, T_Q^S = I,$$

где I — единичная матрица [3].

Таким образом, вопрос исследования барицентров Васерштейна от гауссовских мер сводится к задаче на конечномерном пространстве средних и ковариационных матриц $\mathbb{R}^d \times \operatorname{Sym}_+(d)$. Так как средние входят в выражение для барицентра линейно, то без потери общности можно ограничиться рассмотрением центрированных распределений. Соответственно, в дальнейшем мы будем отождествлять центрированную гауссовскую меру с ее ковариационной матрицей и говорить о распределении и барицентрах на множестве положительно определенных матриц размера $d \times d$.

Работа построена следующим образом: в Разделе 2 показывается, что отображение $Q \mapsto T_Q^S$ дифференцируемо, и исследуются его свойства. В Разделе 3 непосредственно доказывается ЦПТ для эмпирических барицентров.

1.1 Используемые обозначения

Через $\|\cdot\|_F$ будем обозначать норму Фробениуса (Гильберта-Шмидта) матрицы:

$$\|A\|_F^2 := \operatorname{tr} A^\top A.$$

Соответствующее скалярное произведение матриц обозначим как $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

$\lambda_{\max}(A)$ и $\lambda_{\min}(A)$ означают, соответственно, максимальное и минимальное собственные значения матрицы A.

Множество всех симметричных $d \times d$ матриц обозначим через $\mathrm{Sym}(d)$, симметричных положительно определенных матриц — через $\mathrm{Sym}_+(d)$.

2 Дифференцирование оптимального транспортного отображения

В Лемме 1 показано, что матрица оптимального транспортного отображения T_Q^S, определенная в (1), дифференцируема по отношению к Q:

$$T_{Q+X}^S = T_Q^S + DT(X; Q, S) + o\big(\|X\|\big), \quad X \to 0,$$

где $DT(\cdot; Q, S)\colon \mathrm{Sym}(d) \to \mathrm{Sym}(d)$ — самосопряженный отрицательно определенный оператор. Его свойства исследуются в Лемме 2.

Лемма 1. *Для любых матриц* $Q, S \in \mathrm{Sym}_+(d)$ *выполняется*

$$T_{Q'}^S = T_Q^S + DT(Q' - Q; Q, S) + o\big(\|Q' - Q\|\big), \quad Q' \to Q,$$

где

$$DT(X; Q, S) := -S^{1/2} O^\top \Lambda^{-1/2} \delta \Lambda^{-1/2} O S^{1/2}, \tag{2}$$

$O^\top \Lambda O$ *— спектральное разложение* $S^{1/2} Q S^{1/2}$*:*

$$O^\top \Lambda O = S^{1/2} Q S^{1/2}, \quad O^\top O = O O^\top = I, \quad \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda);$$

и

$$\delta = (\delta_{ij})_{i,j=1}^d, \quad \delta_{ij} := \frac{\Delta_{ij}}{\sqrt{\lambda_i} + \sqrt{\lambda_j}}, \quad O^\top \Delta O = S^{1/2} X S^{1/2}.$$

Доказательство. Доказательство основывается на дифференцировании члена $\left(S^{1/2}QS^{1/2}\right)^{-1/2}$, так как

$$DT(X;Q,S) = S^{1/2}\left[d_Q\left(S^{1/2}QS^{1/2}\right)^{-1/2}\right](X)S^{1/2}.$$

Рассмотрим спектральное разложение $S^{1/2}QS^{1/2}$:

$$S^{1/2}QS^{1/2} = O^\top \Lambda O, \tag{3}$$

где $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda)$, а O — ортогональная матрица. Зафиксируем произвольный достаточно маленький $X \in \mathrm{Sym}(d)$ (такой, что $Q + X \succ 0$) и определим $\Delta := OS^{1/2}XS^{1/2}O^\top$ (Δ не обязательно диагональная). Матрицы T_Q^S и T_{Q+X}^S можно переписать в следующем виде:

$$T_Q^S = S^{1/2}O^\top \Lambda^{-1/2}OS^{1/2}, \quad T_{Q+X}^S = S^{1/2}O^\top\left(\Lambda+\Delta\right)^{-1/2}OS^{1/2}. \tag{4}$$

Рассмотрим разложение Тейлора

$$\left(\Lambda+\Delta\right)^{1/2} = \Lambda^{1/2} + \delta(\Delta;\Lambda) + o(\|\Delta\|), \tag{5}$$

с линейным оператором $\delta : \mathrm{Sym}(d) \to \mathrm{Sym}(d)$. В дальнейшем мы опустим зависимость от Λ и Δ, и будем использовать просто δ. Возведя выражение выше в квадрат, имеем

$$\Lambda + \Delta = \Lambda + \Lambda^{1/2}\delta + \delta\Lambda^{1/2} + o(\|\Delta\|).$$

Таким образом, получаем поэлементное выражение для $\delta = (\delta_{ij})$:

$$\delta_{ij} = \frac{\Delta_{ij}}{\sqrt{\lambda_i}+\sqrt{\lambda_j}}. \tag{6}$$

Теперь обратим (5) и применим разложение в ряд Неймана:

$$\begin{aligned}(\Lambda+\Delta)^{-1/2} &= \left(\Lambda^{1/4}\left(I + \Lambda^{-1/4}\delta\Lambda^{-1/4} + o(\|\Delta\|)\right)\Lambda^{1/4}\right)^{-1} = \\ &= \Lambda^{-1/4}\left(I - \Lambda^{-1/4}\delta\Lambda^{-1/4} + o(\|\Delta\|)\right)\Lambda^{-1/4} = \\ &= \Lambda^{-1/2} - \Lambda^{-1/2}\delta\Lambda^{-1/2} + o(\|\Delta\|).\end{aligned}$$

Следовательно, дифференциал $\left[d_Q\left(S^{1/2}QS^{1/2}\right)^{-1/2}\right](X)$ имеет вид

$$\left[d_Q\left(S^{1/2}QS^{1/2}\right)^{-1/2}\right](X) = O^\top\Lambda^{-1/2}\delta\Lambda^{-1/2}O. \tag{7}$$

Учитывая (4), (5) и (6), получаем, что

$$T_{Q+X}^S = T_Q^S + DT(X;Q,S) + o(\|X\|),$$

где $DT(X;Q,S)$ определен равенством (2).

Если это не вызывает неоднозначности, мы будем опускать зависимость от Q или от S, Q одновременно и писать просто $DT(X;S)$ или $DT(X)$, соответственно. Следующие две леммы являются техническими, в них исследуются некоторые свойства оператора $DT(\cdot)$, необходимые для получения ЦПТ.

Лемма 2. *Оператор $DT(\cdot) = DT(\cdot; Q, S)$, определенный в (2), обладает следующими свойствами*

(I) самосопряженность;
(II) отрицательная определенность;
(III) ограничения на собственные числа: для любого $X \in \mathrm{Sym}(d)$

$$-\langle DT(X), X\rangle \le \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(S^{1/2}QS^{1/2})}}{2}\left\|Q^{-1/2}XQ^{-1/2}\right\|_F^2 \le \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(S^{1/2}QS^{1/2})}}{2\,\lambda_{\min}{}^2(Q)}\|X\|_F^2,$$
$$-\langle DT(X), X\rangle \ge \frac{\sqrt{\lambda_{\min}(S^{1/2}QS^{1/2}}}{2}\left\|Q^{-1/2}XQ^{-1/2}\right\|_F^2 \ge \frac{\sqrt{\lambda_{\min}(S^{1/2}QS^{1/2})}}{2\,\lambda_{\max}{}^2(Q)}\|X\|_F^2;$$

(IV) однородность степени $-\frac{3}{2}$ по отношению к Q: $DT(X; aQ, S) = a^{-3/2}DT(X; Q, S)$ для любого $a > 0$;
(V) монотонность по отношению к Q: если $Q \preccurlyeq Q'$, то $DT(\cdot; Q, S) \preccurlyeq DT(\cdot; Q', S)$ в смысле самосопряженных операторов на $\mathrm{Sym}(d)$.

Доказательство. Перепишем (2) следующим образом:

$$DT(X; Q, S) = -S^{1/2}O^\top \Lambda^{-1/2}\delta^X \Lambda^{-1/2}OS^{1/2},$$

где матрицы O и Λ определены в (3), и

$$\delta^X = (\delta^X_{ij})_{i,j=1}^d, \quad \delta^X_{ij} = \frac{\Delta^X_{ij}}{\sqrt{\lambda_i} + \sqrt{\lambda_j}}, \quad \Delta^X = OS^{1/2}XS^{1/2}O^\top.$$

(I) Самосопряженность. Рассмотрим скалярное произведение

$$\langle DT(X), Y\rangle = \mathrm{tr}\big(DT(X)Y\big) = -\,\mathrm{tr}\big(S^{1/2}O^\top \Lambda^{-1/2}\delta^X\Lambda^{-1/2}OS^{1/2}Y\big) =$$
$$= -\,\mathrm{tr}\big(\Lambda^{-1/2}\delta^X\Lambda^{-1/2}OS^{1/2}YS^{1/2}O^\top\big).$$

Обозначим

$$\Delta^Y := OS^{1/2}YS^{1/2}O^\top.$$

Получаем, что

$$-\,\mathrm{tr}\big(\Lambda^{-1/2}\delta^X\Lambda^{-1/2}OS^{1/2}YS^{1/2}O^\top\big) = -\,\mathrm{tr}\big(\Lambda^{-1/2}\delta^X\Lambda^{-1/2}\Delta^Y\big) =$$
$$= -\sum_{i,j}\frac{\delta^X_{ij}}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}\Delta^Y_{ij} = -\sum_{i,j}\frac{\Delta^X_{ij}\Delta^Y_{ij}}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}(\sqrt{\lambda_i}+\sqrt{\lambda_j})} =$$
$$= \mathrm{tr}\big(DT(Y)X\big) = \mathrm{tr}\big(XDT(Y)\big) = \langle X, DT(Y)\rangle.$$

Т.е., оператор является самосопряженным.

(II) Отрицательная определенность и (III) собственные числа Обозначив $\mathit{\Delta}^X$ через $\mathit{\Delta}$ и учитывая полученное выше выражение для скалярного произведения, получаем

$$-\langle DT(X), X\rangle = \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\mathit{\Delta}_{ij}^2}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}(\sqrt{\lambda_i}+\sqrt{\lambda_j})} = \sum_{i,j=1}^{d} \left(\frac{\mathit{\Delta}_{ij}}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}\right)^2 \frac{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}{\sqrt{\lambda_i}+\sqrt{\lambda_j}}. \tag{8}$$

Заметим, что функция $f(\lambda_i,\lambda_j) := \frac{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}{\sqrt{\lambda_i}+\sqrt{\lambda_j}}$ возрастает по обоим аргументам, так что

$$\max_{i,j} f(\lambda_i,\lambda_j) = \frac{\sqrt{\lambda_{\max}}}{2}, \quad \min_{i,j} f(\lambda_i,\lambda_j) = \frac{\sqrt{\lambda_{\min}}}{2}, \tag{9}$$

где $\lambda_{\max} = \lambda_{\max}(\mathit{\Lambda}) = \lambda_{\max}\left(S^{1/2}QS^{1/2}\right)$ и $\lambda_{\min} = \lambda_{\min}(\mathit{\Lambda}) = \lambda_{\min}\left(S^{1/2}QS^{1/2}\right)$. Для удобства введем новую переменную

$$\xi := Q^{-1/2}XQ^{-1/2},$$

Ее норма равна

$$\|\xi\|_F^2 = \mathrm{tr}\big(XQ^{-1}XQ^{-1}\big) = \mathrm{tr}\big(\mathit{\Delta}\mathit{\Lambda}^{-1}\mathit{\Delta}\mathit{\Lambda}^{-1}\big) = \left\|\mathit{\Lambda}^{-1/2}\mathit{\Delta}\mathit{\Lambda}^{-1/2}\right\|_F^2.$$

Наконец, из (8) и (9), можно получить следующие оценки на скалярное произведение:

$$-\langle DT(X), X\rangle \le \max_{i,j} f(\lambda_i,\lambda_j) \sum_{i,j=1}^{d} \left(\frac{\mathit{\Delta}_{ij}}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}\right)^2 = \frac{\sqrt{\lambda_{\max}}}{2}\|\xi\|_F^2$$

и

$$-\langle DT(X), X\rangle \ge \min_{i,j} f(\lambda_i,\lambda_j) \sum_{i,j=1}^{d} \left(\frac{\mathit{\Delta}_{ij}}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}}\right)^2 = \frac{\sqrt{\lambda_{\min}}}{2}\|\xi\|_F^2.$$

Учитывая, что

$$\frac{\|X\|_F}{\lambda_{\max} Q} \le \|\xi\|_F \le \frac{\|X\|_F}{\lambda_{\min} Q},$$

отсюда следуют оценки на собственные числа $DT(\cdot)$.

(IV) Однородность и (V) монотонность Однородность немедленно вытекает их явного выражения (2). Теперь перейдем к доказательству монотонности. Имеют место следующие равенства

$$\begin{aligned}\langle DT(X), X\rangle &= \mathrm{tr}\left(S^{1/2}O^\top \mathit{\Lambda}^{-1/2}\delta\mathit{\Lambda}^{-1/2}OS^{1/2}, X\right) = \\ &= \left\langle O^\top\mathit{\Lambda}^{-1/2}\delta\mathit{\Lambda}^{-1/2}O, S^{1/2}XS^{1/2}\right\rangle = \\ &= \left\langle \left[d_Q\left(S^{1/2}QS^{1/2}\right)^{-1/2}\right](X), S^{1/2}XS^{1/2}\right\rangle = \\ &= \left\langle \left[d_M M^{-1/2}\right]\left(S^{1/2}XS^{1/2}\right), S^{1/2}XS^{1/2}\right\rangle,\end{aligned}$$

где $[d_Q\cdot](X)$ определен в (7), а $M := S^{1/2}QS^{1/2}$. Достаточно показать, что при фиксированном X дифференциал $\left[d_M M^{-1/2}\right](\cdot)$ монотонен по M. Заметим, что обратный оператор $\left[d_M M^{-1/2}\right]^{-1}(\cdot)$ в точке M равен дифференциалу обратного отображения $\left[d_P P^{-2}\right](\cdot)$ в точке $P = M^{-1/2}$:

$$\left[d_M M^{-1/2}\Big|_M\right]^{-1}(\cdot) = \left[d_P P^{-2}\right]\big|_{P=M^{-1/2}}(\cdot).$$

В свою очередь, легко проверить, что

$$\left[d_P P^{-2}\right](X) = -P^{-1}\left(P^{-1}X + XP^{-1}\right)P^{-1}.$$

Данный оператор является отрицательно определенным и

$$\left\langle -P^{-1}\left(P^{-1}X + XP^{-1}\right)P^{-1}, X\right\rangle = -2\operatorname{tr} P^{-2}XP^{-1}X.$$

Рассмотрим произвольные $M_1 \succcurlyeq M_0 \succ 0$ (следовательно, $M_1^{1/2} \succcurlyeq M_0^{1/2}$) и $P_i := M_i^{-1/2}$, $i = 0, 1$. Тогда для любого заданного $X \in \mathrm{Sym}(d)$ выполняется

$$-\operatorname{tr} P_1^{-2}XP_1^{-1}X = -\operatorname{tr} M_1XM_1^{1/2}X \leq -\operatorname{tr} M_0XM_0^{1/2}X = -\operatorname{tr} P_0^{-2}XP_0^{-1}X,$$

т.е. $\left[d_P P^{-2}\right]\big|_{P_1}(\cdot) \preccurlyeq \left[d_P P^{-2}\right]\big|_{P_0}(\cdot)$, и следовательно для дифференциала $M \mapsto M^{-1/2}$ выполнено обратное неравенство:

$$\left[d_M M^{-1/2}\right]\Big|_{M_0}(\cdot) \preccurlyeq \left[d_M M^{-1/2}\right]\Big|_{M_1}(\cdot),$$

что влечет монотонность $DT(\cdot; Q)$.

Лемма 3. *Для любых $Q_0, Q_1, S \in \mathrm{Sym}_+(d)$ рассмотрим*

$$Q_t := (1-t)Q_0 + tQ_1, \quad Q' := Q_0^{-1/2}Q_1Q_0^{-1/2}.$$

Имеют место следующие неравенства:

$$\frac{2}{\lambda_{\min}(Q') + \sqrt{\lambda_{\min}(Q')}} DT\left(\cdot; Q_0, S\right) \preccurlyeq \int_0^1 DT(\cdot; Q_t, S)\, dt \preccurlyeq$$
$$\preccurlyeq \frac{2}{\lambda_{\max}(Q') + \sqrt{\lambda_{\max}(Q')}} DT\left(\cdot; Q_0, S\right).$$

Доказательство. Заметим, что

$$Q_t = Q_0^{1/2}\big((1-t)I + tQ'\big)Q_0^{1/2}.$$

Из однородности и монотонности $DT(\cdot)$ (см. Лемма 2) следует, что

$$DT(\cdot; Q_t, S) \preccurlyeq DT\big(\cdot; ((1-t) + t\,\lambda_{\max}(Q'))Q_0, S\big) =$$
$$= \big((1-t) + t\,\lambda_{\max}(Q')\big)^{-3/2} DT(\cdot; Q_0, S)$$

и

$$DT(\cdot;Q_t,S) \succcurlyeq DT\big(\cdot;((1-t)+t\,\lambda_{\min}(Q'))Q_0,S\big) = \\ = \big((1-t)+t\,\lambda_{\min}(Q')\big)^{-3/2} DT(\cdot;Q_0,S).$$

Таким образом,

$$\int_0^1 DT(\cdot;Q_t,S)\,dt \preccurlyeq DT\left(\cdot;Q_0,S\right) \int_0^1 \big((1-t)+t\,\lambda_{\max}(Q')\big)^{-3/2}\,dt = \\ = \frac{2}{\lambda_{\max}(Q')+\sqrt{\lambda_{\max}(Q')}} DT\left(\cdot;Q_0,S\right)$$

и, соответственно,

$$\int_0^1 DT(\cdot;Q_t,S)\,dt \succcurlyeq \frac{2}{\lambda_{\min}(Q')+\sqrt{\lambda_{\min}(Q')}} DT\left(\cdot;Q_0,S\right).$$

3 ЦПТ для барицентров Васерштейна

Теперь мы можем доказать центральную предельную теорему для эмпирических барицентров Q_n.

Теорема 4 (Центральная предельная теорема для эмпирических барицентров). *Пусть дано распределение $\boldsymbol{P}$ на $\mathrm{Sym}_+(d)$, у которого существует барицентр Q_*. Рассмотрим i.i.d. последовательность случайных матриц $S_1, S_2, \dots \sim \boldsymbol{P}$ и эмпирические барицентры $Q_n := \mathrm{bar}(S_1,\dots,S_n)$. Q_n имеют асимптотически нормальное распределение:*

$$\sqrt{n}(Q_n - Q_*) \rightharpoonup \mathcal{N}\left(0,\Xi\right),$$

где $\Xi\colon \mathrm{Sym}(d) \to \mathrm{Sym}(d)$ — следующий линейный оператор:

$$\Xi := F^{-1} \circ \mathrm{Var}\left(T_{Q_*}^S\right) \circ F^{-1}, \quad F(\cdot) := -\,\mathbb{E}\,DT(\cdot;S,Q_*).$$

Доказательство. Введем обозначения

$$T_i := T_{Q_*}^{S_i}, \quad T_i^n := T_{Q_n}^{S_i}.$$

Согласно Лемме 1

$$T_i^n = T_i + \int_0^1 DT(Q_n - Q_*;Q_t,S_i)\,dt = \\ = T_i + DT(Q_n - Q_*;Q_*,S_i) + \alpha\big(Q_n - Q_*;Q_n,S_i\big) \qquad (10)$$

где $Q_t = (1-t)Q_* + tQ_n$ и $\alpha\big(X;Q_n,S\big) = o\big(\|DT(X;Q_*,S)\|\big)$ при $Q_n \to Q_*$ равномерно по S и X в силу Леммы 3. Заметим, что $\frac{1}{n}\sum T_i^n = I$, так как Q_n — барицентр матриц $S_1,\dots,S_n$. Усредняя (10) по i, получаем

$$I = \overline{T}_n - F_n(Q_n - Q_*) + \alpha_n\big(Q_n - Q_*\big), \qquad (11)$$

где

$$\overline{T}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i, \quad F_n(\cdot) := -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} DT(\cdot; Q_*, S_i), \quad \alpha_n(\cdot) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha(\cdot; Q_n, S_i).$$

Отметим, что $F_n(\cdot)$ является выборочным аналогом оператора $F(\cdot) := -\mathbb{E}\, DT(\cdot; Q_*, S)$. Несложно видеть, что $F(\cdot)$ корректно определен; действительно, в силу Леммы 2 он является самосопряженным, положительно определенным и ограниченным:

$$\|F\|_{op} \le \mathbb{E}\,\|DT(\cdot; Q_*, S)\|_{op} \le \mathbb{E}\,\frac{\sqrt{\lambda_{\max}(S^{1/2}Q_*S^{1/2})}}{2\,\lambda_{\min}{}^2(Q_*)} < \infty.$$

В [4] показано, что $W_2^2(\mu_n, \mu_*) \to 0$ п.н., что в нашем случае эквивалентно сходимости $Q_n \to Q_*$. Так как $F_n(\cdot) \to F(\cdot)$ по закону больших чисел, и $\alpha_n(X) = o\big(\|F_n(X)\|\big)$, из (11) немедленно следует, что

$$Q_n = Q_* + F^{-1}\left(\overline{T}_n - I\right) + o\left(\left\|\overline{T}_n - I\right\|\right);$$

$F^{-1}(\cdot)$ определен корректно в силу положительной определенности $F(\cdot)$. Наконец, применяя ЦПТ для $\overline{T}_n$, получаем утверждение теоремы.

Список литературы

1. C. Villani. *Optimal Transport, Old and New.* Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 2009.
2. F. Santambrogio. *Optimal Transport for Applied Mathematicians.* Birkhäuser, Basel, 2015.
3. M. Agueh and G. Carlier. Barycenters in the wasserstein space. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 43(2):904–924, 2011.
4. T. Le Gouic and J.-M. Loubes. Existence and consistency of wasserstein barycenters. *ArXiv preprint*, 2015.
5. Alexey Kroshnin. Fréchet barycenters in the monge–kantorovich spaces. *Journal of Convex Analysis*, 25(4), 2018.
6. J. Bigot and T. Klein. Consistent estimation of a population barycenter in the wasserstein space. *ArXiv preprint*, 2015.
7. Asuka Takatsu. Wasserstein geometry of gaussian measures. *Osaka Journal of Mathematics*, 48(4):1005–1026, 2011.